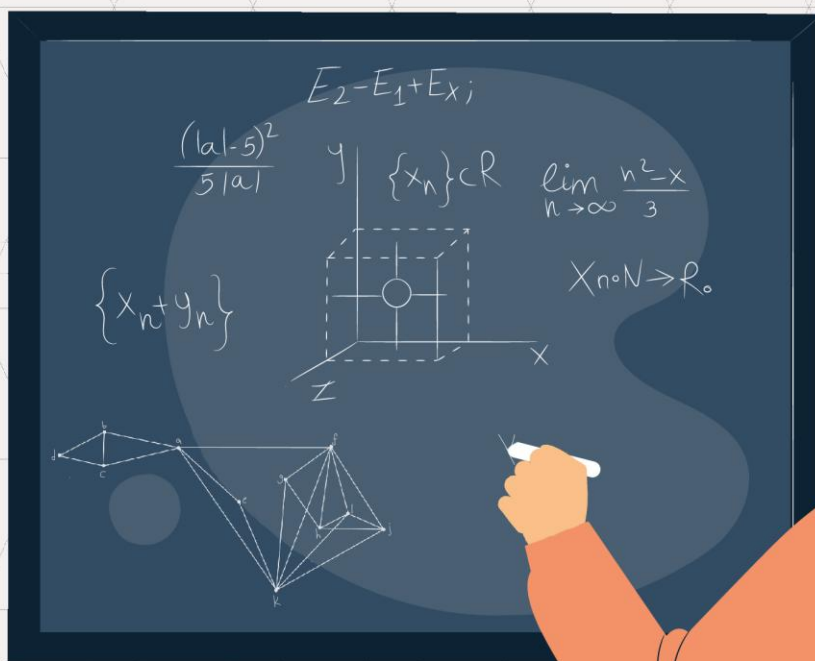


ریاضیات گسسته دوازدهم

مستویه دوم

(نمونه سوالات حل شده)





فصل سوم : ترکیبیات (شمارش)

درس اول : مباحثی در ترکیبیات

۱- با ارقام ۲ و ۱ و ۱ و ۱ چند رمز چهار رقمی می توان نوشت؟

پاسخ:

جایگشت با اعداد تکراری داریم و عدد ۱، سه بار تکرار شده. پس:

$$\frac{4!}{3!} = 4$$

۲- با ارقام ۵ و ۴ و ۴ و ۲ و ۳ و ۲ و ۲ و ۱ و ۱ چند عدد ۹ رقمی می توان ساخت؟

پاسخ:

$n = 9$, 4:2 و 3:2 و 2:2 و 1:1

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 2!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{2 \times 3! \times 2}$$





۳- ۹ نفر به چند طریق می‌توانند در ۳ اتاق ۲ نفره، ۳ نفره و ۴ نفره واقع در یک هتل اسکان یابند؟

پاسخ:

ابتدا ۲ نفر از ۹ نفر را برای اتاق ۲ نفره انتخاب می‌کنیم پس $\binom{9}{2}$ ، سپس از ۷ نفر باقی مانده ۳ نفر را برای اتاق ۳ نفره انتخاب می‌کنیم پس $\binom{7}{3}$ و در نهایت از بین ۴ نفر باقی مانده چهار نفر را برای اتاق ۴ نفره انتخاب می‌کنیم پس $\binom{4}{4}$

$$\binom{9}{2} \binom{7}{3} \binom{4}{4} = \frac{9!}{2! \times 7!} \times \frac{7!}{3! \times 4!} \times \frac{4!}{0! \times 4!} = \frac{9!}{2! \times 3! \times 4!}$$

۴- معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ چند جواب صحیح و مثبت دارد؟

پاسخ:

$$x_1 > 0, \quad x_2 > 0, \quad x_3 > 0$$

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{6}{2}$$





۵- معادله‌ی $x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_4 = 14$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط
آنکه $x_1 > 1$, $x_3 > 3$

پاسخ:

$$x_1 > 1 \rightarrow x_1 \geq 2 \rightarrow x_1' : x_1 - 2 \geq 0$$

$$x_3 > 3 \rightarrow x_3 \geq 4 \rightarrow x_3' : x_3 - 4 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 14$$

$$x_3' + 2 + x_3' + 4 + x_4 + x_5 = 14$$

$$x_1 + x_2 + x_3' + x_4 + x_5 = 8 \rightarrow$$

تعداد جواب های صحیح و نامنفی:

$$\binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4}$$





۶- می‌خواهیم ۸ نفر را که دو به دو برادر یکدیگرند در دو طرف طول میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر رو به روی برادرش بنشیند به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

پاسخ:

دور میز ۴ جفت صندلی وجود دارد که می‌خواهیم ۴ جفت برادر را روی آن‌ها بنشانیم که ۴! حالت دارد. از طرفی برای هر جفت صندلی ۲ حالت برای نشاندن برادرها داریم، پس در کل $2^4 \times 4!$ است.

۷- با ارقام ۵ و ۶ و ۷ و ۷ و ۵ و ۷ چه تعداد کد ۶ رقمی می‌توان نوشت؟

پاسخ:

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3!}{3! \times 2} = 60$$





۸- اگر $A = \{۱، ۲، ۳، ۴\}$ و $B = \{۵، ۶، ۷، ۸، ۹\}$ در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می توان نوشت که هر یک شامل دو رقم متمایز از A و سه رقم متمایز از B باشد؟

پاسخ:

۲ رقم متمایز از A : $\binom{4}{2}$

۳ رقم متمایز از B : $\binom{5}{3}$

و ۵ عدد به ۵! حالت می توانند کنار هم قرار بگیرند پس:

$$\binom{4}{2} \binom{5}{3} \times 5!$$





۹-۴ کتاب فیزیک و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم، این عمل به چند روش امکان پذیر است اگر:

(الف) هیچ محدودیتی نباشد.

(ب) همواره کتاب های فیزیک کنار هم باشند؟

(پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.

(ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

پاسخ:

(الف) در کل ۹ کتاب داریم پس تعداد حالت ها برابر $9!$ است.

(ب) ۴ کتاب فیزیک را به عنوان یک کتاب در نظر می‌گیریم که با ۵ کتاب ریاضی در کل ۶ کتاب به حساب می‌آیند و تعداد حالت ها $6!$ است. ۴ کتاب فیزیک هم به تعداد $4!$ حالت کنار هم قرار می‌گیرند. پس تعداد کل برابر است با: $6! \times 4!$

(پ) باید کتاب ها یکی در میان چیده شوند فیزیک ها به $5!$ حالت کنار هم قرار می‌گیرند و کتاب های ریاضی هم به $4!$ حالت یکی در میان کنار هم قرار می‌گیرند.

(ت) سه کتاب خاص را یک کتاب در نظر می‌گیریم و با ۶ کتاب باقی مانده در کل ۷ کتاب داریم پس تعداد حالت ها $7!$ است و سه کتاب خاص نیز به $3!$ حالت کنار هم قرار می‌گیرند پس در کل $7! \times 3!$ حالت می‌شود.





۱۰- برای کنار هم قرار گرفتن ۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم مسئله ای طرح کنید که پاسخ آن $4! \times 7!$ باشد.

پاسخ:

۴ دانش آموز پایه دوازدهم و ۶ دانش آموز پایه یازدهم به چند طریق می توانند در یک صف کنار هم قرار بگیرند به طوری که همواره دانش آموزان پایه دوازدهم کنار هم باشند.

۱۱- می خواهیم روی تعدادی جعبه کدگذاری و هر جعبه را با یک کد شامل ۹ حرف $a, a, b, c, c, d, d, d, d$ از بقیه مجزا کنیم حداکثر چند جعبه را می توانیم با این کدها از بقیه مجزا کنیم؟

پاسخ:

$$\frac{9!}{3! \times 3! \times 2!}$$





۱۲- ۷ نفر به چند طریق می توانند در دو اتاق دو نفره و یک اتاق ۳ نفره قرار بگیرند؟

پاسخ:

$$\frac{7!}{2! \times 2! \times 3!}$$

۱۳- به چند طریق می توان ۸ توپ یکسان را بین ۴ نفر توزیع کرد هرگاه بخواهیم هر نفر حداقل یک توپ داشته باشد؟

پاسخ:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8 \quad x_i \geq 1$$

$$\binom{7}{3} = 35$$





۱۴- به چند طریق می توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد اگر بخواهیم:

(الف) به دلخواه انتخاب کنیم.

(ب) از هر گل حداقل ۱ شاخه انتخاب کنیم.

(پ) از گل نوع دوم حداقل دو شاخه و از گل نوع پنجم بیش از سه شاخه انتخاب کنیم؟

پاسخ:

(الف)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \quad x_i \geq 0$$

$$\binom{11+5-1}{4} = \binom{15}{4}$$

(ب)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \quad x_i \geq 1$$

$$\binom{10}{4}$$





ادامه پاسخ سوال ۱۴ :

(پ)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \quad \begin{cases} x_2 \geq 2 \\ x_5 > 3 \end{cases}$$

چون $x_5 > 3$ پس $x_5 \geq 4$

$$x_2': x_2 - 2 \geq 0, \quad x_5': x_5 - 4 \geq 0$$

$$x_1 + x_2' + 2 + x_3 + x_4 + x_5' = 5$$

$$\begin{pmatrix} 0 + 5 - 1 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$$

(ت)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11$$

$$x_1 + x_2 + x_4 + x_5 = 11 \quad x_4 \geq 5$$

$$x_4': x_4 - 5 \geq 0$$

$$x_1 + x_2 + x_4' + 5 + x_5 = 11$$

$$x_1 + x_2 + x_4' + x_5 = 6$$

$$\begin{pmatrix} 6 + 5 - 1 \\ 5 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix}$$





۱۵- تعداد جواب های صحیح و نامنفی هر یک از معادلات زیر با شرط های داده شده بیابید.

الف) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10 \quad x_i \geq 0, \quad 2 \leq i \leq 5$

ب) $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 11 \quad x_i \geq 1, \quad 1 \leq i \leq 5$

ت) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7 \quad x_i \geq 0, \quad 1 \leq i \leq 4$

ث) $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \quad x_i \geq 0$

پاسخ:

الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10 \quad x_2 > 0 : x_2 \geq 1$

$$x_3 > 0 : x_3 \geq 1$$

$$x_4 > 0 : x_4 \geq 1$$

$$x_5 > 0 : x_5 \geq 1$$

$$x_2' : x_2 - 1 \geq 0$$

$$x_3' : x_3 - 1 \geq 0$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_4' : x_4 - 1 \geq 0$$

$$x_5' : x_5 - 1 \geq 0$$

$$x_1 + x_2' + 1 + x_3' + 1 + x_4' + 1 + x_5' + 1 = 10$$

$$x_1 + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' = 6 \rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$





ادامه پاسخ سوال ۱۵ :

$$\text{ب) } x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12 \quad x_1 > 2 : x_5 \geq 4$$

$$x_1' = x_1 - 2 \geq 0, \quad x_5' = x_5 - 4 \geq 0$$

$$x_1' + 2 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5' + 4 = 12$$

$$x_1' + x_2 + x_3 + x_4 + x_5' + x_6 = 6$$

$$\binom{6+6-1}{6-1} = \binom{11}{5}$$

$$\text{پ) } x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$$

$$x_1 \geq 1 \rightarrow x_1' : x_1 - 1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 1 \rightarrow x_2' : x_2 - 1 \geq 0$$

$$x_3 \geq 1 \rightarrow x_3' : x_3 - 1 \geq 0$$

$$x_4 \geq 1 \rightarrow x_4' : x_4 - 1 \geq 0$$

$$x_5 \geq 1 \rightarrow x_5' : x_5 - 1 \geq 0$$

$$x_1' + 1 + x_2' + 1 + x_3' + 1 + x_4' + 1 + x_5' + 1 = 11$$

$$x_1' + x_2' + x_3' + x_4' + x_5' = 6 \quad \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$





ادامه پاسخ سوال ۱۵ :

$$\text{ت) } x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$$

با توجه به ضریب x_2 ، سه حالت در نظر می گیریم:

$$x_2 = 0 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7 \rightarrow \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

$$x_2 = 1 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 4 \rightarrow \binom{4+3-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$$

$$x_2 = 2 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \rightarrow \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$36 + 15 + 3 = 54$$

$$\text{ث) } x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \quad x_i \geq 0$$

$$x_2 = 0 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3 \rightarrow \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

$$x_2 = 1 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2 \rightarrow \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

$$x_2 = 4 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1 \rightarrow \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

$$x_2 = 9 \rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0 \rightarrow \binom{0+3-1}{3-1} = \binom{2}{2} = 1$$

$$10 + 6 + 3 + 1 = 20$$





۱۶- به چند طریق می توان ۵ توپ یکسان را بین ۲ نفر و به دلخواه توضیح داد؟

پاسخ:

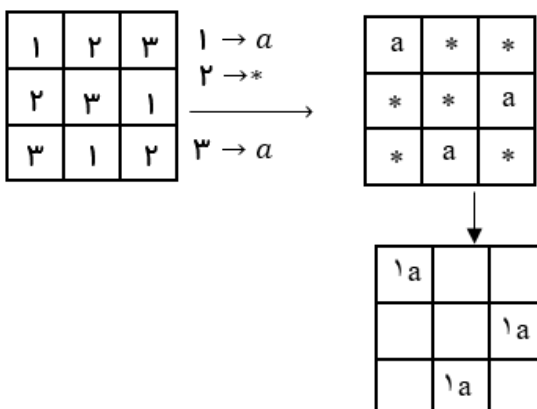
$$x_1 + x_2 + x_3 = 5 \quad x_i \geq 0$$

$$\binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

۱۷- آیا مربع لاتین حاصل از اعمال جایگشت روی اعضای یک مربع دلخواه می تواند با مربع اولیه متعامد باشد؟

پاسخ:

خیر، مثلاً اگر در جایگشت، $1 \rightarrow a$ باشد، آنگاه در مقابل تمام ۱ های مربع اول، عدد a در مربع دوم ظاهر می شود. که در مربع تلفیق زوج $1a$ تکراری می شود.





درس دوم: روش‌هایی برای شمارش

۱۸- چند عدد طبیعی مانند n که $1 \leq n \leq 350$ وجود دارد به طوری که بر هیچ یک از اعداد ۴، ۵، ۶ بخش پذیر نباشند؟

پاسخ:

بخش پذیر بر ۴: A بخش پذیر بر ۲۰: $A \cap B$

بخش پذیر بر ۵: B بخش پذیر بر ۱۲: $A \cap C$

بخش پذیر بر ۳۰: $B \cap C$

بخش پذیر بر ۶: C بخش پذیر بر ۶۰: $A \cap B \cap C$

اینکه به حداقل یکی از آنها ۱- باشد، برابر این است که بر هیچ کدام بخش پذیر نباشد، بخش پذیر باشد.

$$= \text{کل} - |A \cup B \cup C|$$

$$= 350 - (|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|)$$

$$351 - \left(\left\lfloor \frac{350}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{350}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{350}{6} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{350}{20} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{350}{12} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{350}{30} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{350}{60} \right\rfloor \right)$$

$$= 350 - [87 + 70 + 58 - 17 - 11 - 29 + 5] = 187$$





۱۹- اگر یک قفل رمز دار شامل ۴ رقم از صفر تا ۹ باشد و بدانیم که رمز بسته شده روی قفل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۸ را شامل می شود و امتحان کردن هر رمز ۴ رقمی، ۵ ثانیه طول بکشد حداکثر چه زمانی لازم است تا این قفل باز شود؟

پاسخ:

$$A: \quad \text{عدد 7 به کار نرفته} \quad |A| = 9 \times 9 \times 9 \times 9 = 9^4$$

$$B: \quad \text{عدد 8 به کار نرفته} \quad |B| = 9^4$$

$$A \cap B \quad \text{عدد 7, 8 به کار نرفته} \quad |A \cap B| = 8^4$$

$$S = 10^4$$

$$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = S - |A \cup B| = S - (|A| + |B| - |A \cap B|)$$

$$= 10^4 - (9^4 + 9^4 - 8^4) = 974 \quad 974 \times 5 = 4870 S$$





۲۰- از بین ۵ نفر حداقل چند نفر در یک فصل به دنیا آمده اند؟

پاسخ:

تعداد افراد: تعداد کبوترها

فصل ها: لانه ها

پس طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ نفر در یک فصل به دنیا آمده اند.

۲۱- در یک دبیرستان حداقل چند دانش آموز وجود داشته باشند تا مطمئن باشیم حداقل ۱۰ نفر از آنها ماه و روز هفته ی تولدشان یکی است؟

پاسخ:

هر سال ۱۲ ماه و هر هفته ۷ روز است پس $n = 12 \times 7 = 84$

$$k + 1 = 10 \rightarrow k = 9$$

$$\text{تعداد دانش آموزان} = kn + 1 = 84 \times 9 + 1 = 757$$





۲۲- در بین اعداد ۱ تا ۹۰، $1 \leq n \leq 90$ چند عدد وجود دارد که بر ۲ یا ۳ بخش پذیر باشد؟

پاسخ:

$$A: \quad \text{اعدادی که بر ۲ بخش پذیرند} \quad |A| = \left\lfloor \frac{90}{2} \right\rfloor = 45$$

$$B: \quad \text{اعدادی که بر ۳ بخش پذیرند} \quad |B| = \left\lfloor \frac{90}{3} \right\rfloor = 30$$

$$A \cap B: \quad \text{اعدادی که بر ۲ و ۳ بخش پذیرند} \quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{90}{6} \right\rfloor = 15$$

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

$$= 45 + 30 - 15 = 60$$





۲۳- در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۲۰۰ ($1 \leq n \leq 200$) چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش پذیر باشند ولی بر ۷ بخش پذیر نباشد.

پاسخ:

$$A: \quad \text{بخش پذیر بر 4} \quad |A| = \left\lfloor \frac{200}{4} \right\rfloor = 50$$

$$B: \quad \text{بخش پذیر بر 5} \quad |B| = \left\lfloor \frac{200}{7} \right\rfloor = 28$$

$$A \cap B: \quad \text{بخش پذیر بر 4 و 7} \quad |A \cap B| = \left\lfloor \frac{200}{28} \right\rfloor = 7$$

$$|A - B| = |A| - |A \cap B| = 50 - 7 = 43$$





۲۴- در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ یک از این سه تیم نبوده اند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می کنند، مشخص کنید.

(الف) چند نفر هر سه رشته ی ورزشی را بازی می کنند؟

(ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می کنند.

(ج) چند نفر والیبال بازی می کنند ولی بسکتبال بازی نمی کنند.

(د) چند نفر فقط در یک رشته بازی می کنند؟

پاسخ:

$$A: \quad \text{فوتبال} \quad |A| = 15$$

$$B: \quad \text{بسکتبال} \quad |B| = 9$$

$$C: \quad \text{والیبال} \quad |C| = 11$$

$$|A \cap B| = 3 \quad |A \cap C| = 5 \quad |B \cap C| = 6$$

(الف)

$$|A \cup B \cup C|$$

$$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$24 = 21 + |A \cap B \cap C| \rightarrow |A \cap B \cap C| = 3$$





ادامه پاسخ سوال ۲۴:

(ب)

$$|A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

$$15 - 3 - 5 + 3 = 10$$

(ج)

$$|C - B| = |C| - |B \cap C| = 11 - 6 = 5$$

(د)

$$\text{فقط فوتبال: } |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 10$$

$$\text{فقط والیبال: } |B| - |A \cap B| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 3$$

$$\text{فقط بسکتبال: } |C| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = 3$$

$$\text{پس: } 10 + 3 + 3 = 16$$





۲۵- اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هر یک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد. برای باز کردن این قفل حداکثر چقدر زمان نیاز داریم؟

پاسخ:

ارقام در دسترس: ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹

$$|S| = 9^5$$

$$A: \quad \text{فاقد رقم 2} \quad |A| = 8^5$$

$$B: \quad \text{فاقد رقم 7} \quad |B| = 8^5$$

$$C: \quad \text{فاقد رقم 3} \quad |C| = 8^5$$

$$|A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 7^5$$

$$|A \cap B \cap C| = 6^5$$

$$|A \cap B \cap C| = 3 \times 8^5 - 3 \times 7^5 + 6^5$$

$$|A' \cap B' \cap C'| = |S| - |A \cup B \cup C| = 9^5 - [3 \times 8^5 - 3 \times 7^5 + 6^5] \\ = 3390$$

$$\text{پس: } 3390 \times 6 = 20340S$$





۲۶- چه تعداد تابع $f: A \rightarrow B$ می توان تعریف کرد که $|A| = 5$ و $|B| = 4$. چه تعداد یک به یک هستند؟

پاسخ:

تعداد توابع: 4^5

0 : تعداد توابع یک به یک

زیرا اعضای A بیشتر از B است.

۲۷- به چند طریق می توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم.

پاسخ:

تعداد حالات انتخاب افراد برای کتاب: $\frac{8}{1} \times \frac{7}{1} \times \frac{6}{1} \times \frac{5}{1} \times \frac{4}{1}$
کتاب اول کتاب دوم کتاب پنجم





۲۸- به چند طریق می توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد؟ به طوری که هر داور یک فیلم را داوری کند؟

پاسخ:

تعداد حالت ها برابر است با تعداد توابع پوشا از مجموع ۶ عضوی به مجموع سه عضوی:

$$|S| = 3^6 \quad \text{دامنه: } \{x_1, x_2, \dots, x_6\}$$

$$\text{برد: } \{y_1, y_2, y_3\}$$

$$A: \quad y_1 \text{ فاقد } : 2^6 = |A|$$

$$B: \quad y_2 \text{ فاقد } : 2^6 = |B|$$

$$C: \quad y_3 \text{ فاقد } : 2^6 = |C|$$

چون برای هر عضو A دو حالت (دو انتخاب داریم)

$$|A \cap B \cap C| = 0 \quad |A \cap B| = |A \cap C| = |B \cap C| = 1$$

چون برد فقط شامل یک عضو می شود.

$$|A \cup B \cup C| = 3 \times 2^6 - 3 + 0 = 3(2^6 - 1)$$

$$|A' \cup B' \cup C'| = |S| - |A \cup B \cup C| = 3^6 - 3(2^6 - 1) = 540$$





۲۹- ثابت کنید در بین هر ۳۶۸ نفر حداقل دو نفر هستند که در یک روز متولد شده اند.

پاسخ:

افراد را کبوتر و روزهای سال را لانه ها در نظر می گیریم، طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نفر وجود دارند که در یک روز متولد شده اند.

۳۰- ثابت کنید اگر در یک دبیرستان حداقل ۵۰۵ دانش آموز مشغول تحصیل باشند، لااقل ۷ نفر از آنها روز هفته و ماه تولدشان یکسان است.

پاسخ:

$$\underbrace{7}_{\text{روز}} \times \underbrace{12}_{\text{ماه}} = 84 \rightarrow \text{تعداد کبوتر}$$

$$\left\lceil \frac{505}{84} \right\rceil = ? \quad 505 \text{ لانه ها}$$

$$505 = kn + 1 \rightarrow 505 = k \times 84 + 1$$

$$k = 6 \rightarrow k + 1 = 7$$





۳۱- حداقل چند نفر در یک سالن ورزشی مشغول تماشای مسابقه‌ی کشتی باشند تا مطمئن باشیم لااقل ۲۰ نفر از آنها روز تولدشان یکسان است؟

پاسخ:

$$n = 365 \quad k + 1 = 20 \rightarrow k = 19$$

$$365 \times 19 + 1 = 6936$$

۳۲- ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عدد زوج است:

پاسخ:

$\{0,1\}$: باقی مانده اعداد در تقسیم بر 2

سه عدد طبیعی: کبوترها، باقی مانده تقسیم بر ۲ : لانه ها

طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است. زیرا حداقل ۲ عدد باقی مانده یکسان خواهند داشت یعنی یا باقی مانده هر دو ۱ است پس اعداد فرد هستند، یا باقی مانده هر دو صفر است که در هر دو صورت مجموع اعداد زوج می شود.





۳۳- مجموعه اعداد $A: \{1, 2, \dots, 84\}$ را در نظر می گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه ۴۳ عضوی از A حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر ۸۵ باشد.

پاسخ:

اعدادی که مجموعشان برابر ۸۵ باشد به صورت زیر است:

$$\underbrace{\{1, 84\} \{2, 83\} \{3, 82\}, \dots, \{42, 43\}}_{42 \text{ زیر مجموعه}}$$

که اینها تعداد لانه ها هستند و اعداد درون آنها را کبوتر در نظر می گیریم. که می خواهیم از این لانه ها ۴۳ کبوتر به عنوان یک زیرمجموعه ۴۳ عضوی انتخاب کنیم طبق اصل لانه کبوتری، حداقل ۲ کبوتر از یک لانه برداشته خواهند شد.





۳۴- ۱۳ نقطه درون یک مستطیل 6×8 قرار دارند. نشان دهید حداقل ۲ نقطه از این ۱۳ نقطه وجود دارند که فاصله آنها کمتر از $\sqrt{8}$ باشد.

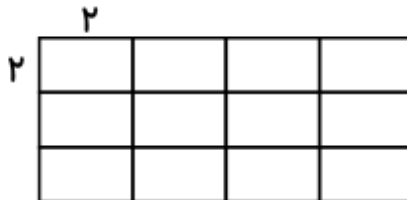
پاسخ :

قطر مربع های کوچک برابر $\sqrt{n}$ است.

۱۲ مربع کوچک داریم $\leftarrow$ لانه ها

۱۳ نقطه داریم $\leftarrow$ کبوترها

طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نقطه وجود دارند که داخل یک مربع کوچک قرار می گیرند و چون قطر مربع $\sqrt{8}$ است پس فاصله آنها از $\sqrt{8}$ کمتر است.





۳۵- ۵ نقطه در صفحه با مختصات صحیح در نظر می گیریم، ثابت کنید حداقل دو نقطه از این ۵ نقطه وجود دارد به طوری که مختصات نقطه وسط این دو نقطه نیز صحیح باشد.

پاسخ:

حالت های ممکن برای مختصات نقاط

$$\begin{bmatrix} \text{فرد} \\ \text{زوج} \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} \text{زوج} \\ \text{فرد} \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} \text{فرد} \\ \text{فرد} \end{bmatrix} \text{ و } \begin{bmatrix} \text{زوج} \\ \text{زوج} \end{bmatrix}$$

که اینها لانه ها هستند و نقطه ها (۵ نقطه) کبوترها و طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نقطه وجود دارند که در یک لانه قرار می گیرند و مختصات آنها مانند هم است پس جمع طول ها و جمع عرض ها زوج می شود پس مختصات وسط آنها نیز صحیح می شود.

